Chapitre : Déterminants

I) Déterminant en dimension 2

Dans cette partie, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 et $b = (e_1, e_2)$ une base de E.

a) Déterminant d'une famille de deux vecteurs

On considère deux vecteurs $u = x_1e_1 + x_2e_2$ et $v = y_1e_1 + y_2e_2$ de E.

Théorème 1. *La famille (u, v) est liée si, et seulement si, $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$.*

Démonstration.

- Si (u, v) est liée, alors soit il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $v = \lambda u$, *i.e.* $y_1 = \lambda x_1$, $y_2 = \lambda x_2$ et $x_1y_2 - x_2y_1 = x_1(\lambda x_2) - x_2(\lambda x_1) = 0$, soit $u = 0_E$, *i.e.* $x_1 = x_2 = 0$ et $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$.
- Si $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$, alors
  $\rightarrow$ si $x_1 \neq 0$, alors $y_2 = \frac{y_1}{x_1}x_2$ et $y_1 = \frac{y_1}{x_1}x_1$, donc $v = \frac{y_1}{x_1}u$.
  $\rightarrow$ si $x_2 \neq 0$, alors $y_1 = \frac{y_2}{x_2}x_1$ et $y_2 = \frac{y_2}{x_2}x_2$, donc $v = \frac{y_2}{x_2}u$.
  $\rightarrow$ si $x_1 = x_2 = 0$, alors $u = 0_E$.
  Dans tous les cas, u et v sont colinéaires, *i.e.* (u, v) est liée.

$\square$

Définition 1. On appelle **déterminant de la famille** (u, v) **dans la base** b le nombre

$$\det_b(u, v) = x_1y_2 - x_2y_1.$$

Le théorème 1 signifie que la famille (u, v) est liée si, et seulement si, $\det_b(u, v) = 0$. Comme $\dim E = 2$, la famille (u, v) est une base de E si, et seulement si, elle est libre. Par conséquent,

$$\boxed{(u, v) \text{ est une base de } E \iff \det_b(u, v) \neq 0}.$$

Propriétés.

1. $\det_b$ est bilinéaire, *i.e.* pour tous $(u, v, w) \in E^3$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{cases} \det_b(u, v + \lambda w) = \det(u, v) + \lambda \det_b(u, w), \\ \det_b(u + \lambda w, v) = \det(u, v) + \lambda \det_b(w, v). \end{cases}$$

   Démonstration. Les deux fonctions $v \longmapsto \det_b(u, v)$ et $u \longmapsto \det_b(u, v)$ sont des combinaisons linéaires des corrdonnées respectivement de v et u, donc ces deux applications sont linéaires. $\square$

2. $\det_b$ est alternée, *i.e.* pour tout $u \in E$, $\det_b(u, u) = 0$.

   Démonstration. (u, u) est liée ou $\det_b(u, u) = x_1x_2 - x_2x_1 = 0$. $\square$

3. $\det_b$ est antisymétrique, *i.e.* pour tout $(u, v) \in E^2$, $\det_b(v, u) = -\det_b(u, v)$.

   Démonstration. D'après la propriété "alternée" et la bilinéarité du déterminant,

   $$0 = \det_b(u+v, u+v) = \det_b(u, u) + \det_b(u, v) + \det_b(v, u) + \det_b(v, v) = \det_b(u, v) + \det_b(v, u),$$

   d'où le résultat. □

4. $\det_b(b) = 1$.

   Démonstration. Les coordonnées de e_1 dans b sont $(1, 0)$ et celles de e_2 sont $(0, 1)$. Donc $\det_b(b) = 1 \times 1 - 0 \times 0 = 1$. □

5. Soit $\varphi : E^2 \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme bilinéaire alternée. Pour tout $(u, v) \in E^2$, $\varphi(u, v) = \varphi(b)\det_b(u, v)$.

   Démonstration. On reprend les mêmes notations.

   $$\begin{aligned} \varphi(u, v) &= \varphi(x_1e_1 + x_2e_2, y_1e_1 + y_2e_2), \\ \varphi(u, v) &= x_1y_1\varphi(e_1, e_1) + x_1y_2\varphi(e_1, e_2) + x_2y_1\varphi(e_2, e_1) + x_2y_2\varphi(e_2, e_2). \end{aligned}$$

   Or $\varphi(e_1, e_1) = 0 = \varphi(e_2, e_2)$ et $\varphi(e_2, e_1) = -\varphi(e_1, e_2)$, donc

   $$\begin{aligned} \varphi(u, v) &= (x_1y_2 - x_2y_1)\varphi(e_1, e_2), \\ \varphi(u, v) &= \varphi(b)\det_b(u, v). \end{aligned}$$

   □

Théorème 2 (Changement de base)**.** *Soit b' une autre base de E. Pour tout $(u, v) \in E^2$,*

$$\boxed{\det_{b'}(u, v) = \det_{b'}(b)\det_b(u, v)}.$$

En particulier, $\det_{b'}(b) = (\det_b(b'))^{-1}$.

Démonstration. On applique la propriété 5 à l'application bilinéaire alternée $\det_{b'}$. □

b) Déterminant d'un endomorphisme

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. L'application $(u, v) \longmapsto \det_b(f(u), f(v))$ est une forme bilinéaire alternée sur E, donc d'après la propriété 5, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $(u, v) \in E^2$,

$$\det_b(f(u), f(v)) = \lambda \det_b(u, v)$$

avec $\lambda = \det_b(f(b))$.

Proposition 1. *Le nombre* $\det_b(f(b))$ *ne dépend pas de la base b choisie.*

Démonstration. Soit b' une autre base de E. D'après la formule de changement de base, pour tout $(u, v) \in E^2$,

$$\begin{cases} \det_{b'}(f(u), f(v)) = \det_{b'}(b)\det_b(f(u), f(v)), \\ \det_{b'}(u, v) = \det_{b'}(b)\det_b(u, v). \end{cases}$$

En multipliant $\det_b(f(u), f(v)) = \det_b(f(b))\det_b(u, v)$ par $\det_{b'}(b)$, on obtient

$$\det_{b'}(f(u), f(v)) = \det_b(f(b))\det_{b'}(u, v).$$

En particulier pour $(u, v) = b'$, $\det_{b'}(f(b')) = \det_b(f(b))$. □

Définition 2. On définit le **déterminant** de f par

$$\boxed{\det(f) = \det_b(f(e_1), f(e_2)) = \det_b(f(b))}$$

où $b = (e_1, e_2)$ est une base quelconque de E.

Propriétés. Soient $(f, g) \in (\mathscr{L}(E))^2$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et b une base de E.

1. Pour tout $(u, v) \in E^2$, on a $\det_b(f(u), f(v)) = \det(f)\det_b(u, v)$.

   Démonstration. $\det_b(f(u), f(v)) = \det_b(f(b))\det_b(u, v) = \det(f)\det_b(u, v)$. □

2. $\det(\mathrm{Id}_E) = 1$, $\det(\lambda f) = \lambda^2 \det(f)$ et $\det(f \circ g) = \det(f)\det(g)$.

   Démonstration.
   - $\det(\mathrm{Id}_E) = \det_b(\mathrm{Id}_E(b)) = \det_b(b) = 1$.
   - $\det(\lambda f) = \det_b((\lambda f)(b)) = \det_b(\lambda f(e_1), \lambda f(e_2)) = \lambda^2 \det_b(f(b)) = \lambda^2 \det(f)$.
   - $\det(f \circ g) = \det_b(f(g(b))) = \det(f)\det_b(g(b)) = \det(f)\det(g)$.

   □

3. $f \in \mathrm{Gl}(E) \Longleftrightarrow \det(f) \neq 0$. Dans ce cas, $\det(f^{-1}) = \dfrac{1}{\det(f)}$.

   Démonstration. $f \in \mathrm{Gl}(E) \Longleftrightarrow f(b)$ est une base de $E \Longleftrightarrow \det_b(f(b)) \neq 0 \Longleftrightarrow \det(f) \neq 0$. De plus si $f \in \mathrm{Gl}(E)$, alors comme $\mathrm{Id}_E = f \circ f^{-1}$, $1 = \det(\mathrm{Id}_E) = \det(f \circ f^{-1}) = \det(f)\det(f^{-1})$, d'où le résultat. □

c) Déterminant d'une matrice 2×2

Définition 3. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. Le **déterminant** de la matrice A est le nombre

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

On remarque que s'il existe deux vecteurs (u, v) d'un espace vectoriel E et b une base de E tels que $A = M_b(u, v)$, alors $\det(A) = \det_b(u, v)$. En particulier, $\det(A)$ est le déterminant de la famille des vecteurs-colonnes de A dans la base canonique de $\mathbb{K}^2$.

Théorème 3. *Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et b une base de E. Alors* $\det(M_b(f)) = \det(f)$.

Démonstration. Il suffit de rappeler que $M_b(f) = M_b(f(b))$ et $\det(f) = \det_b(f(b))$. □

Propriétés. Soient $(A, B) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. Deux matrices représentant le même endomorphisme dans des bases différentes ont le même déterminant.
2. $\det({}^tA) = \det(A)$, $\det(I_n) = 1$, $\det(\lambda A) = \lambda^2 \det(A)$ et $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
3. $A \in \mathrm{Gl}_2(\mathbb{K}) \Longleftrightarrow \det(A) \neq 0$. Dans ce cas, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

II) Déterminant en dimension 3

Dans cette partie, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3.

a) Déterminant d'une famille de trois vecteurs et d'une matrice 3×3

Définition 4.

1. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K})$. Le **déterminant** de la matrice A est donné par la formule de Sarrus

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}.$$

2. Soient b une base de E et $(u, v, w) \in E^3$. Le **déterminant** de la famille (u, v, w) dans la base b est le nombre

$$\det_b(u, v, w) = \det(M_b(u, v, w)).$$

De la même manière qu'en dimension 2, on en déduit les mêmes propriétés.

Propriétés. Soient $(A, B) \in (\mathscr{M}_3(\mathbb{K}))^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. $\det_b$ est une forme trilinéaire, alternée et antisymétrique.
2. $\det_b(b) = \det(I_n) = 1$.
3. Le déterminant d'une matrice se calcule par développement suivant une ligne ou une colonne.
4. $\det({}^tA) = \det(A)$ et $\det(\lambda A) = \lambda^3 \det(A)$.
5. Si $\varphi : E^3 \longrightarrow \mathbb{K}$ est une forme trilinéaire alternée, alors pour tout $(u, v, w) \in E^3$,

$$\varphi(u, v, w) = \varphi(b) \det_b(u, v, w).$$

6. Soit b' une autre base de E. Alors pour tous vecteurs u, v et w de E,

$$\boxed{\det_{b'}(u, v, w) = \det_{b'}(b) \det_b(u, v, w)}.$$

En particulier, $\det_{b'}(b) = (\det_b(b'))^{-1}$.

Théorème 4. *Soit $(u, v, w) \in E^3$. La famille (u, v, w) est liée si, et seulement si,* $\det_b(u, v, w) = 0$.

Comme en dimension 2, on en déduit que

$$\boxed{(u, v, w) \text{ est une base de } E \iff \det_b(u, v, w) \neq 0}.$$

Conséquences. Le déterminant est inchangé si on ajoute à une colonne (resp. ligne) une combinaison linéaire des autres colonnes (resp. lignes). Si on multiplie toute une rangée par un scalaire λ, alors le déterminant est multiplié par λ.

b) Déterminant d'un endomorphisme

Le déterminant dans un espace vectoriel de dimension 3 ayant les mêmes propriétés que le déterminant dans un plan, on peut définir de la même manière le déterminant d'un endomorphisme. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. L'application $(u, v, w) \longmapsto \det_b(f(u), f(v), f(w))$ est une forme trilinéaire alternée sur E, donc d'après la propriété 5, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $(u, v, w) \in E^3$,

$$\det_b(f(u), f(v), f(w)) = \lambda \det_b(u, v, w)$$

avec $\lambda = \det_b(f(b))$.

Proposition 2. *Le nombre* $\det_b(f(b))$ *ne dépend pas de la base b choisie.*

Définition 5. On définit le **déterminant** de f par

$$\boxed{\det(f) = \det_b(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \det_b(f(b))}$$

où $b = (e_1, e_2, e_3)$ est une base quelconque de E.

On en déduit les mêmes propriétés sur les déterminants des endomorphismes et des matrices qu'en dimension 2.

Propriétés. Soient $(f, g) \in (\mathscr{L}(E))^2$, $(A, B) \in (\mathscr{M}_3(\mathbb{K}))^2$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et b une base de E.

1. $\det(M_b(f)) = \det(f)$.
2. Deux matrices représentant le même endomorphisme dans des bases différentes ont le même déterminant.
3. Pour tout $(u, v, w) \in E^3$, on a $\det_b(f(u), f(v), f(w)) = \det(f) \det_b(u, v, w)$.
4. $\det(\mathrm{Id}_E) = 1$ et $\det(\lambda f) = \lambda^3 \det(f)$.
5. $\det(f \circ g) = \det(f) \det(g)$ et $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.
6. $f \in \mathrm{Gl}(E) \iff \det(f) \neq 0$. Dans ce cas, $\det(f^{-1}) = \dfrac{1}{\det(f)}$.
7. $A \in \mathrm{Gl}_2(\mathbb{K}) \iff \det(A) \neq 0$. Dans ce cas, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

III) Orientation d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Dans tout ce paragraphe, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \leqslant 3$. Soient $\mathscr{B}$ l'ensemble des bases de E et b_0 une base de E. Notons

$$\mathscr{B}_+ = \{b \in \mathscr{B} \mid \det_{b_0}(b) > 0\} \text{ et } \mathscr{B}_- = \{b \in \mathscr{B} \mid \det_{b_0}(b) < 0\}.$$

Alors $(\mathscr{B}_+, \mathscr{B}_-)$ est une partition de $\mathscr{B}$. Cette partition ne dépend pas du choix de b_0.

Démonstration. Soit b une base quelconque de E.

– Si on remplace la base b_0 par une base $b'_0 \in \mathscr{B}_+$, alors $\det_{b_0}(b) > 0 \iff \det_{b'_0}(b) > 0$ car $\det_{b_0}(b) = \det_{b_0}(b'_0) \det_{b'_0}(b)$ et $\det_{b_0}(b'_0) > 0$. Donc les parties $\mathscr{B}_+$ et $\mathscr{B}_-$ sont inchangées.
– De la même manière, si on remplace b_0 par $b'_0 \in \mathscr{B}_-$, alors $\det_{b_0}(b) > 0 \iff \det_{b'_0}(b) < 0$. Donc dans ce cas, $\mathscr{B}_+$ et $\mathscr{B}_-$ sont échangées.

□

Définition 6. **Orienter** l'espace E, c'est choisir l'une de ces deux parties de la partition de $\mathscr{B}$, dont les éléments seront appelés **bases directes**. Les éléments de l'autre partie sont appelés **bases indirectes** ou **rétrogrades**. Il y a deux orientations possibles.

Si E est orienté et si b est une base directe de E, alors pour toute base b' de E,

$$\boxed{b' \text{ est une base directe de } E \iff \det_b(b') > 0}.$$